

## CÁLCULO DO FATOR DE ATRITO EM DIFERENTES TRECHOS DO DIAGRAMA DE MOODY UTILIZANDO MATLAB

Daniela Patricia Guzmán Rojo<sup>1</sup>, Camila Duane Correa Gaia<sup>2</sup>, João Carlos Cury Saad<sup>3</sup>

**RESUMO:** O fator de atrito,  $f$ , é fundamental para o cálculo da perda de carga ao longo das tubulações utilizando a equação de Darcy-Weisbach e, conseqüentemente, para o dimensionamento de sistemas de irrigação. O objetivo deste trabalho foi desenvolver um código em MatLab para cálculo do fator de atrito da fórmula de Darcy-Weisbach, a partir da identificação das melhores equações para as diferentes regiões do Diagrama de Moody. Analisou-se o comportamento das equações gerais de cálculo de  $f$  de Swamee & Jain, Swamee, Offor & Alabi e Vatankhah comparativamente com as equações específicas para cada trecho do diagrama de Moody. Com base nos menores erros relativos obtidos, as equações recomendadas e adotadas no código MatLab foram: Swamee, para o Regime Laminar; Konakov para o Regime Turbulento/liso; Vatankhah, para Regime Turbulento/rugoso, e também, para o regime de transição; e para o Regime Turbulento transitório a equação de Offor & Alabi.

**PALAVRAS-CHAVE:** hidráulica; perda de carga; irrigação.

## FRICITION FACTOR DETERMINATION IN DIFFERENT SECTIONS OF THE MOODY CHART USING MATLAB

**ABSTRACT:** The friction factor,  $f$ , is fundamental for calculating the head loss along the pipelines using the Darcy-Weisbach equation and, consequently, for the design of irrigation systems. This work aimed to develop a MatLab code to calculate the friction factor of the Darcy-Weisbach formula, from the identification of the best equation in each region of the Moody chart. The general  $f$  equations of Swamee & Jain, Swamee, Offor & Alabi, and Vatankhah's were compared with the region-specific equations of the Moody Chart to select

<sup>1</sup> Eng Civil, Doutoranda em Irrigação e Drenagem, Departamento de Engenharia Rural, Botucatu - SP, daniela.guzman.rojo@gmail.com

<sup>2</sup> Eng Agrônoma, Mestranda em Irrigação e Drenagem, Departamento de Engenharia Rural, Botucatu - SP, camilagaia7@gmail.com

<sup>3</sup> Eng Agrônomo, Professor Titular, Departamento de Engenharia Rural, FCA/UNESP, Av. Universitária, 3780, CEP 18610-034, Botucatu, SP, (14)38807533, joao.saad@unesp.br

the best alternatives for composing the code. Based on the smallest relative errors obtained, the recommended equations for  $f$  determination in Matlab code were: Swamee for Laminar Regime; Konakov for hydraulically smooth pipes; Vatankhah, for hydraulically roughened pipes, and also for the transition regime; and the transient turbulent regime the Offor & Alabi equation.

**KEYWORDS:** irrigation systems; head loss; hydraulic.

## INTRODUÇÃO

A elaboração de projetos hidráulicos requer, dentre outras variáveis, a determinação da perda de carga que ocorre ao longo da tubulação, sendo este um dos fatores que mais influencia no custo do sistema, pois está diretamente relacionado ao consumo de energia.

Para a determinação da perda de carga em tubulação, a equação de Darcy-Weisbach (Equação 1) é a mais recomendada (Brown, 2002), pela fundamentação teórica e pela amplitude de aplicação (Liou, 1998). Ela apresenta um coeficiente atrito ( $f$ ) cuja determinação de forma explícita e precisa é continuamente estudada e aprimorada.

$$hf = \frac{8.f.L.Q^2}{\pi^2.g.D^5} \quad (1)$$

Em que:  $hf$  = perda de carga, mca;  $f$  = fator de atrito;  $L$  = comprimento da tubulação, m;  $Q$  = vazão, em  $m^3.s^{-1}$ ;  $g$  = aceleração da gravidade,  $m.s^{-2}$ ;  $D$  = diâmetro interno da tubulação, m.

A aplicabilidade da equação de Darcy-Weisbach depende da forma de cálculo do coeficiente  $f$ , que varia conforme o regime de escoamento, com o fluido em questão e com a rugosidade da tubulação.

O Diagrama de Moody foi muito utilizado para estimar o coeficiente  $f$  porém, por ser um método gráfico e por não ser compatível com simulações computacionais, é cada vez menos aplicado (Offor & Alabi, 2016). Diversas equações foram desenvolvidas para estimar  $f$  em determinadas faixas específicas do Diagrama de Moody, que representam determinado regime de escoamento ou parte deste regime.

Para o Regime Laminar utiliza-se a equação de Hagen-Poiseuille, que depende apenas do Número de Reynolds ( $Re$ ) (Romeo et al., 2002). Para o Regime de Turbulento, a equação mais conhecida para estimativa de  $f$  é a equação de Colebrook (1939), que depende, além do

Re, da rugosidade relativa ( $e/D$ ), sendo mais complexa por ser uma equação implícita. Esta equação é válida para  $4 \times 10^3 \leq Re \leq 10^8$  e  $0 \leq e/D \leq 0,1$ .

Devido à complexidade de resolução da equação de Colebrook, diversas equações explícitas foram desenvolvidas por diferentes autores ao longo dos anos. Dentre elas tem-se a equação de Konakov, citada por Robaina (1992), para tubos hidraulicamente lisos e a equação de Nikuradse (1933), citado por Allen (1996), para tubos hidraulicamente rugosos.

Uma outra linha de desenvolvimento científico foi a busca por equações gerais, para amplas faixas ou mesmo para a totalidade do diagrama de Moody, como é o caso da equação de Swamme & Jain (1976) e Swamee (1993). Pimenta et al. (2018) listaram 29 equações explícitas gerais para a determinação do fator de atrito  $f$ , sendo que a equação de Offor e Alabi (2016) foi a mais precisa, com erro relativo máximo de 2,128%, o que permite utilizá-la como alternativa à equação de Colebrook.

Vatankhah (2018) apresentou uma equação simples, de precisão maior que a de Offor e Alabi, com erro máximo menor que 0,054%, tornando-se a mais precisa até o momento.

O objetivo deste trabalho foi desenvolver um código em MatLab para cálculo do fator de atrito da fórmula de Darcy-Weisbach, a partir da identificação das melhores equações para as diferentes regiões do diagrama de Moody.

## MATERIAL E MÉTODOS

Na realização desta pesquisa foram consideradas as equações específicas apresentadas na Tabela 1 para o cálculo do fator  $f$  da equação de Darcy-Weisbach, segundo o regime de escoamento (Tabela 2).

**Tabela 1.** Equações específicas utilizadas.

Autor	Equação	Regime de escoamento
Hagen-Poiseuille	$f = \frac{64}{Re}$	Laminar
Colebrook (1939)	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{f}} + \frac{e}{3.71D} \right)$	Transitório e Turbulento transitório
Konakov	$f = \left[ -2 \log \left( \frac{5.62}{Re^{0.9}} \right) \right]^{-2}$	Turbulento liso
Nikuradse (1933)	$f = \left[ -2 \log \left( \frac{e}{3.71 D} \right) \right]^{-2}$	Turbulento rugoso

**Tabela 2.** Classificação do regime de escoamento.

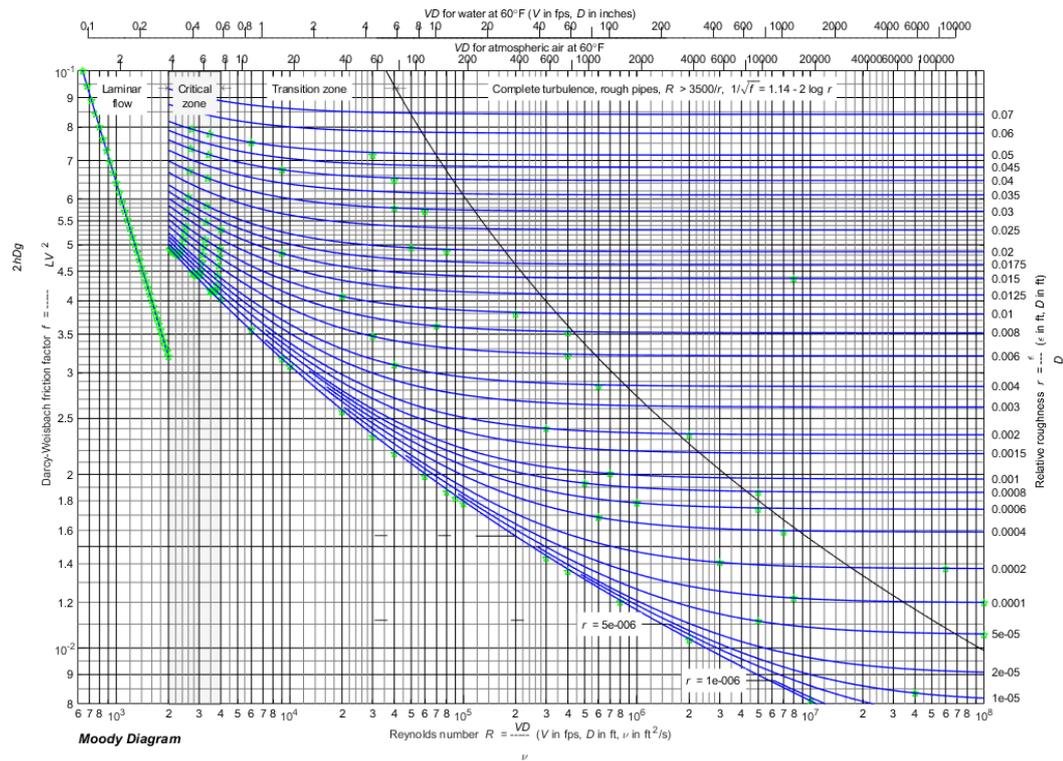
Critérios	Regime de escoamento
$Re < 2000$	Laminar
$2000 \leq Re \leq 4000$	Transitório
$Re > 4000$	Turbulento
$Re > 4000$ e $\frac{Re^{0.9}}{D/e} < 31$	Turbulento liso
$Re > 4000$ e $31 < \frac{Re^{0.9}}{D/e} < 448$	Turbulento transitório
$Re > 4000$ e $\frac{Re^{0.9}}{D/e} \geq 448$	Turbulento rugoso

As equações gerais para estimativa de  $f$  consideradas neste trabalho estão descritas na Tabela 3 e foram selecionadas por serem amplamente utilizadas no dimensionamento de sistemas de irrigação e/ou pela elevada precisão.

Para verificar qual é a melhor equação para cada região do Diagrama de Moody (regime de escoamento), foram utilizados 163 pontos resultantes de combinações do número Reynolds ( $Re$ ) com a rugosidade relativa ( $e/D$ ), indicados em verde na Figura 1.

**Tabela 3.** Equações testadas para cada trecho

Autor	Equação
Swamee & Jain (1976)	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{e}{3.7 D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right)$
Swamee (1993)	$f = \left\{ \left( \frac{64}{Re} \right)^8 + 9.5 \left[ \ln \left( \frac{e}{3.7 D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) - \left( \frac{2500}{Re} \right)^6 \right]^{-16} \right\}^{0.125}$
Offor & Alabi (2016)	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left\{ \frac{e}{3.71 D} - \frac{1.975}{Re} \left[ \ln \left( \left( \frac{e}{3.93 D} \right)^{1.092} + \left( \frac{7.627}{Re + 395.9} \right) \right) \right] \right\}$
Vatankhah (2018)	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.8686 \ln \left[ \frac{0.3984 Re}{(0.8686 s)^{\frac{s-0.645}{s+0.39}}} \right]$ $s = 0.12363 Re \left( \frac{e}{D} \right) + \ln(0.3984 Re)$



**Figura 1.** Pontos (em verde) do diagrama de Moody utilizados na avaliação das equações (código MatLab adaptado de Metzger & Willard).

A determinação do fator  $f$  nos 163 pontos do Diagrama de Moody com todas as equações avaliadas foi realizada em planilhas eletrônicas do software Microsoft Excel<sup>®</sup>, com exceção da equação de Colebrook, para qual foi utilizado o Matlab<sup>®</sup>. Após a obtenção dos resultados foram realizados os cálculos do erro relativo (ER), que é considerado um parâmetro útil na avaliação do modelo mais preciso para a estimativa do  $f$ , nos intervalos dos regimes analisados (Sadegui et al., 2015).

As equações gerais (Tabela 2) foram avaliadas quanto a precisão na estimativa de  $f$  comparativamente com as equações específicas (Tabela 1), consideradas como referência em seus respectivos regimes de escoamento. Os valores de ER foram classificados da seguinte forma: “muito bom”,  $ER \leq 0,55$ ; “bom”,  $0,55 < ER \leq 1,00$ ; “médio”,  $1,00 < ER \leq 2,00$ ; “fraco”,  $2,00 < ER \leq 3,00$ ; e “ruim”,  $ER > 3,00$ .

A partir dos resultados obtidos foram identificadas as melhores equações para cada trecho do Diagrama de Moody, as quais foram adotadas no código do Matlab<sup>®</sup> (em Anexo) para cálculo do fator de atrito  $f$  da equação de Darcy-Weisbach.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na comparação entre os diferentes regimes de escoamento houve diferença entre as equações para cada trecho do diagrama de Moody. Os maiores ER ocorreram no Regime Laminar. A equação que apresentou o menor ER foi a de Swamee (1993) com o valor de 0,001%, classificada como “muito boa”. As demais equações apresentaram ER “ruim”, entre 30,95% e 41,17%, com a tendência de subestimar os valores de  $f$ , justamente porque estas equações gerais não foram elaboradas para o regime laminar. No entanto, a equação de Swamee incluiu em sua formulação a de Hagen-Poiseuille (Swamee & Swamee, 2007) e, por isso, resultou no melhor desempenho neste regime de escoamento. O maior ER ocorreu com a equação de Vatankhah.

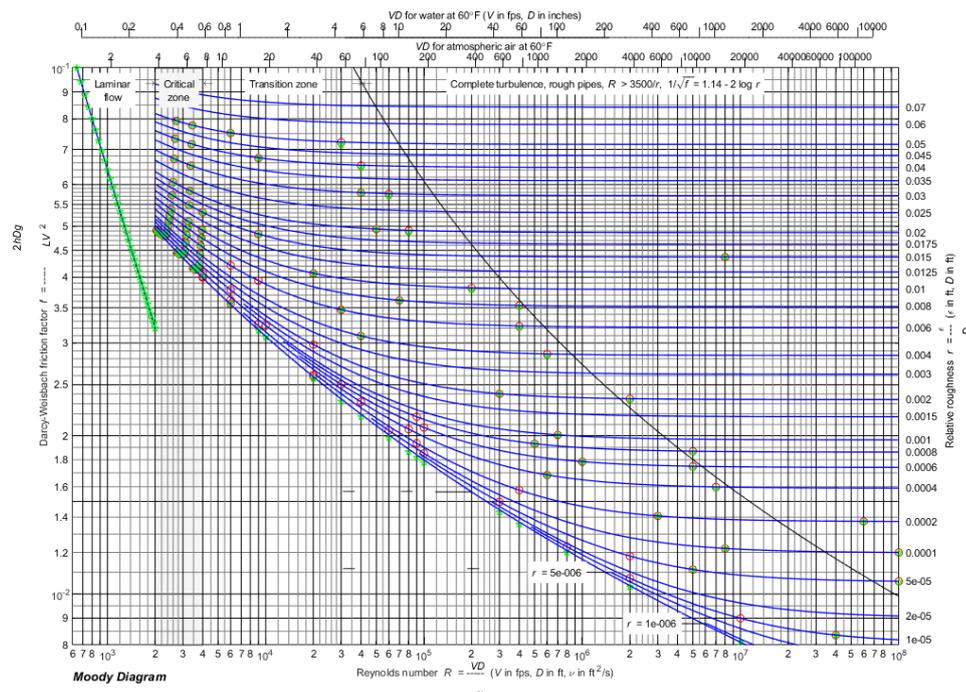
Para o Regime Transitório a equação de Vatankhah apresentou o menor erro, seguida por Offor & Alabi, com ER de 0,01% e 0,073%, respectivamente, ambas classificadas como “muito boa”, e com subestimação de  $f$  em relação à equação específica para o regime. As equações de Swamee e de Swamee & Jain foram classificadas como “ruim”, com ER de 14,85% e 3,12%, respectivamente.

No Regime Turbulento para tubos hidraulicamente lisos, todas as equações apresentaram ER classificado como “ruim”. O menor erro foi obtido com a equação de Vatankhah e Offor & Alabi ambas com ER de 6,79% e as demais equações apresentaram erros em torno de 7%, não sendo recomendadas para este trecho do diagrama, sendo mais apropriada a utilização da equação específica de Konakov.

Para os tubos hidraulicamente rugosos, o melhor resultado foi obtido utilizando a equação de Vatankhah com erro de 0,64%, seguida por Offor & Alabi com 0,67%, classificadas como “boas”. As equações de Swamee & Jain e de Swamee foram classificadas como “média”, com ER de 1,17% e 1,13%, respectivamente. Todas as equações apresentam a tendência de superestimação de  $f$ , neste trecho do diagrama de Moody.

No Regime Turbulento transitório, o melhor desempenho foi obtido pela equação de Offor & Alabi com ER de 0,004%, seguida por Vatankhah com erro de 0,02%, ambas com a tendência de subestimação e classificadas como “muito boa”. As equações de Swamee & Jain e de Swamee apresentaram ER de 1,38% e 1,31%, com tendência a superestimação e classificadas como “média”.

Na Figura 2 tem-se o Diagrama de Moody indicando em verde os 163 pontos originais selecionados para avaliar as equações e em vermelho tem-se as estimativas destes pontos, obtida com a equação que apresentou melhor desempenho em determinado trecho do gráfico.



**Figura 2.** Pontos originais (em verde) e as melhores estimativas (em vermelho) representados no Diagrama de Moody (código MatLab adaptado de Metzger & Willard).

## CONCLUSÕES

Para a elaboração do código MatLab para cálculo do fator de atrito da equação de Darcy-Weisbach foram selecionadas as seguintes equações, com base nos menores erros relativos obtidos: Swamee, para o Regime Laminar; Konakov para Regime Turbulento/liso; Vatankhah, para Regime Turbulento/rugoso, e também, para o regime de transição; e para o Regime Turbulento transitório a equação de Ofor & Alabi.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEN, R. G. Relating the Hazen-Williams and Darcy-Weisbach friction loss equations for pressurized irrigation. **Applied Engineering in Agriculture**, v.12, n.6, p.685-693, 1996.

BROWN, G. (2002). The History of the Darcy-Weisbach Equation for Pipe Flow Resistance. **Proc. Environ. Water Resour. Hist.** 38. 10.1061/40650(2003)4.

COLEBROOK, C.F. Turbulent flow in pipes with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws. **Journal Institute Civil Engineers**, v.11, n.4, p.133-156, 1939.

OFFOR, U.H.; ALABI, S.B. An accurate and computationally efficient friction factor model. **Advances in Chemical Engineering and Science**, v.6, n.3, p. 237-245, 2016.

LIU, C. P. Limitations and Proper Use of the Hazen-Williams Equation. **Journal of Hydraulic Engineering**, v.124, n.9, p.951-954, 1998.

METZGER & WILLARD. Disponível em: < <http://www.metzgerwillard.com> >. Acesso em: 6 jul. 2019.

PIMENTA, B.D.; ROBAINA, A.D.; PEITER, M.X.; MEZZOMO, W.; KIRCHNER, J.H. BEM, L.H.B. Performance of explicit approximations of the coefficient of head loss for pressurized conduits. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, v.22, n.5, p. 301-307, 2018.

ROBAINA, A. D. Análise de equações explícitas para o cálculo do coeficiente "f" da fórmula universal de perda de carga. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 22, n. 2, p. 157-159, 1992.

ROMEO, E.; ROYO, C.; MONZÓN, A. Improved explicit for estimation of the friction factor in rough and smooth pipes. **Chemical Engineering Journal**, v.86, n.3, p.369-374, 2002.

SADEGHI, S.; PETERS, R. T.; LAMM, F. R. Design of zero slope microirrigation laterals: Effect of the friction factor variation. **Journal of Irrigation and Drainage Engineering**, v.141, p.1-9, 2015.

SWAMEE, P. K. Design of a Submarine Oil Pipeline. **Journal of Transportation Engineering, ASCE**, 119(1), 159–170. 1993.

SWAMEE, P. K.; SWAMEE, N. Full-range pipe-flow equations. **Journal of Hydraulic Research**, v.45, n.6, p.841-843, 2007.

SWAMEE, P. K.; JAIN, A. K. Jain. Explicit equations for pipeflow problems. **Journal of the Hydraulics Division**, v.102, n.5, p. 657-664, 1976.

VATANKHAH, A.R. Approximate analytical solutions for the Colebrook equation. **Journal of Hydraulic Engineering**, v. 144, n.5, p.06018007, 2018.

## ANEXO – Código no Matlab

Código Matlab

```

clear all;
close all;
clc
fprintf('\n\n "DETERMINAÇÃO DO FATOR DE ATRITO"\n\n');
E=input('Entre com a rugosidade relativa do tubo (e/D):');
Re=input('Entre com o Número de Reynolds (Re):');
if Re<=2000; disp ('Fluxo Laminar')
    f = (((64/Re)^8)+9.5*(log((E/(3.7)))+(5.74/(Re^0.9)))-((2500/Re)^6))^(-16))^0.125;
end
if Re>2000 && Re<4000; disp ('Fluxo em regime transitorio')
    S=(0.12363*Re*E)+(log(0.3984*Re));
    f=(1/(0.8686*log((0.3984*Re)/((0.8686*S)^(S-0.645)/(S+0.39)))))^2;
end
if Re>=4000 && (Re^0.9)*(E)<=31;
    f=(-2*(log10(5.62/(Re^0.9))))^-2; disp ('Fluxo Turbulento, Tubo hidraulicamente liso')
end
if Re>=4000 && (Re^0.9)*(E)>=448;
    S=(0.12363*Re*E)+(log(0.3984*Re));
    f=(1/(0.8686*log((0.3984*Re)/((0.8686*S)^(S-0.645)/(S+0.39)))))^2; disp ('Fluxo
Turbulento, Tubo hidraulicamente rugoso')
end
if Re>=4000 && ((Re^0.9)*(E))>31 && 448>((Re^0.9)*(E)) ;
    f=(1/(-2*log10(((E/3.71)-((1.975/Re)*(log(((E/3.93)^1.092)+(7.627/(Re+395.9))))))))))^2;
disp ('Fluxo Turbulento, Transição')
end
disp ('Fator de atrito');
f

```

Código da equação de Colebrook-White

```

clear all;
close all;

```

```
clc
fprintf('\n\n "EQUAÇÃO DE COLEBROOK & WHITE"\n\n');
E=input('Entre com a rugosidade relativa do tubo (e/D):');
Re=input('Entre com o Número de Reynolds(Re):');
i=1;
f=1;
es=0.0001;
while i<=100
    Fx=1+2*sqrt(f)*log10(((E)/(3.71))+2.51/(Re*(f^0.5)));
    Dfx=(f^(-0.5))*log10(((E)/(3.71))+2.51/(Re*(f^0.5)))-
    2.51/(Re*f*log10(((E)/(3.71))+2.51/(Re*(f^0.5))));
    f1=f-Fx/Dfx;
    ea=abs((f1-f)/f1);
    if ea<=es
        fprintf('\n "Resultados"\n');
        fprintf('\n a raiz que satisfaz a equação é:%6.12f\n',f1);
        fprintf('\n Número de Iterações:%6.0f\n',i);
        break
    end
    f=f1;
    i=i+1;
end
```